6/3/2017

Μάθημα 3

$\sqrt[n]{w} = z \qquad z^n = w$

Για το $\sqrt{1}$ $\qquad z = p(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$

$w = r(\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi)$

$p^n = r \Rightarrow p = \sqrt[n]{r}$

$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\text{συν}\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$

$z_1 = \sqrt[n]{r}\left(\text{συν}\left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)\right)$

$\vdots$

$z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\text{συν}\left(\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$

Πχ.1. $\quad -1 = \text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi$

Αρα $\sqrt{-1} = \begin{cases} \text{συν}(\pi/2) + i\text{ημ}(\pi/2) \\ \text{συν}\left(\frac{\pi + 2\pi}{2}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi + 2\pi}{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

Πχ.3. $\sqrt[3]{1}$: $\quad \varepsilon_0 = \text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3} \quad 1$

$\varepsilon_1 = \text{συν}(\pi + 2\pi/3) + i\text{ημ}(\pi + 2\pi/3) = -1/2$

$\varepsilon_2 = \text{συν}\left(\frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{3}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$

$\varepsilon_k = \text{συν}\left(\frac{0 + 2\pi k}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) = \text{συν}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, \dots n-1}$

$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \left(\text{συν}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\left(\text{συν}\left(\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\cdot 2\pi}{n}\right)\right) =$

$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_\lambda = \varepsilon_{k+\lambda}$

$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\text{συν}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^j = \frac{\left(\text{συν}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n - 1}{\text{συν}(\quad) - 1}$

$= \frac{\text{συν}(2\pi) + i\text{ημ}(2\pi) - 1}{\left(\text{συν}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) - 1} = 0$

$$1\cdot\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\,\eta\mu\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^j = \left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\,\eta\mu\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

δεν ξερω τι εκανα εδω

Θετ

$$= (\ldots)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$$

αρα

$$= \sigma\upsilon\nu[(n-1)\pi] + i\,\eta\mu[(n-1)\pi] = (-1)^{n-1}$$

οτε

ξ ▸ $ax^2+2\beta x+\gamma=0$

$\Delta=\beta^2-4a\gamma$

$az^2+2zb+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{C}$

$$az^2+2zb+c = a\left(z^2+2\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

οπι

να

δι

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-b^2+ac}{a^2}\right]=0 \Rightarrow \left(z+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-ac}{a^2}$$

$$z=-\frac{b}{a}+R \;; \quad \boxed{R^2=\frac{b^2-ac}{a^2}}$$

▸ $z^3+az^2+bz+c=0 \quad , \quad a,b,c,z\in\mathbb{C}$

$z \quad z=J-\frac{a}{3}$

$$\left(J-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(J-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(J-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

$$J^3-3J^2\frac{a}{3}+3J\frac{a^2}{9}-\frac{a^3}{27}+aJ^2-2\frac{a^2}{3}J+\frac{a^3}{9}+bJ-\frac{ba}{3}+c=0$$

$$J^3+\left(\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+b\right)J-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=0$$

$$J^3+AJ+B=0 \quad , \quad A=-\frac{a^2}{3}+b$$

$$B=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

Θετω $\zeta = \xi - \frac{A}{3\xi}$

αρα εχω $\xi^3 - 3\xi^2\frac{A}{3\xi} + 3\xi\frac{A^2}{9\xi^2} - \frac{A^3}{27\xi^3} + A\xi - \frac{A^2}{3\xi} + B = 0$

$\xi^3 - \cancel{A\xi} + \cancel{\frac{A^2}{3\xi}} - \frac{A^3}{27\xi^3} + \cancel{A\xi} - \cancel{\frac{A^2}{3\xi}} + B = 0$

$\xi^3 - \frac{A^3}{27\xi^3} + B = 0$

$\eta = \xi^3 \quad | \quad \eta^2 + B\eta - \frac{A^3}{27} = 0$

οποιο η και να βαλω τις ιδιες ριζες θα βρω $\eta_{1,2}$ (2 μιγαδικοι που ικανοποιουν την εξισωση)

$\xi^3 = \eta_1 \Rightarrow \xi_1, \xi_2, \xi_3 \Rightarrow \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \Rightarrow z_1, z_2, z_3$

Μεθοδος Carδano.

• $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\text{συν}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

⊛ Οι n-οστες ριζες απεχουν ιδια αποσταση μεταξυ τους.

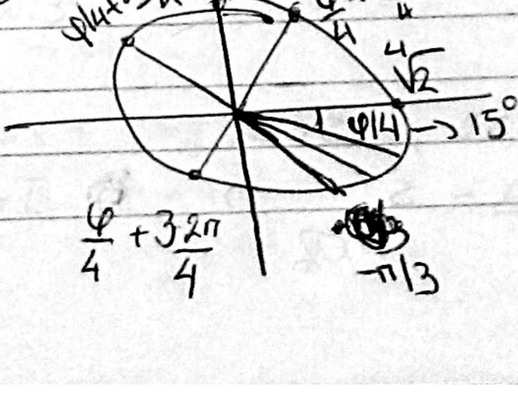
πχ. $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$

$|1 - i\sqrt{3}| = 2$

Arg$(1 - i\sqrt{3})$ = ~~...~~ - τοξεφ $\sqrt{3}$ $= -60^\circ$

$|z_k| = \sqrt[4]{2}$

(ειμαι στο 4ο τεταρτημοριο)



$\rightarrow \dfrac{a}{(z-1)(z+3i)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+3i}$

$Az+3Ai+Bz-B = (A+B)z+3Ai-B$

Άρα $a = (A+B)z+3Ai-B$

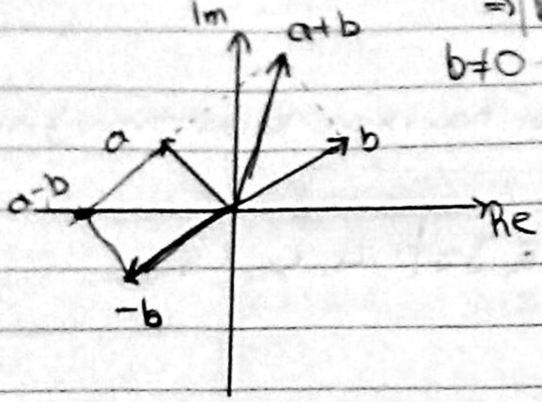
$A+B=0$

$a=3Ai-B \Leftrightarrow B=3Ai-a=-A$

$(3i+1)A=a \Leftarrow 3Ai+A=a$

$\Rightarrow \boxed{A=\dfrac{a}{3i+1}=-B}$

$b\neq 0$



$\mathcal{E}(a,b)=\{z=a+sb,\ s\in\mathbb{R}\}$

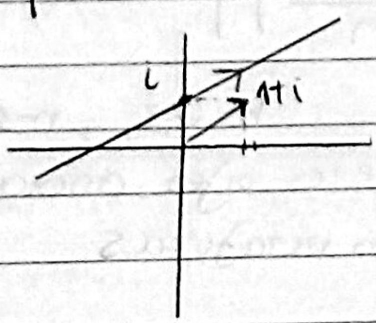
$\Downarrow$

Ευθεία που διέρχεται από το a και έχει φορέα το b

π.χ. $a=i$, $b=1+i$ | $\mathcal{E}(i,1+i)$

$\circledast\ \mathcal{E}(i,-1-i)\quad \mathcal{E}(i,1+i)$

διαφορετικό



$w\in\mathcal{E}(a,b)\ \exists s:\ a+sb=w$

$s' \quad a+s'b=w$

$-\ (s-s')b=0 \Rightarrow s=s'$ άτοπο άρα το s είναι μοναδικό.

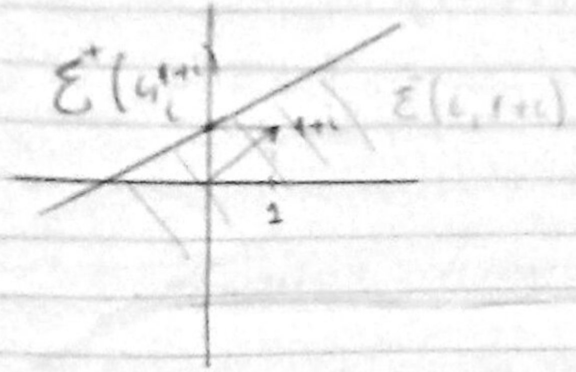
$w=a+sb,\ s\in\mathbb{R}$

$\dfrac{w-a}{b}=s \in\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\dfrac{w-a}{b}\right)=0$

* $\mathcal{E}(a,b)=\{w : \operatorname{Im}\left(\frac{w-a}{b}\right)=0\}$ ⇐ [illegible]

$\mathcal{E}^{+}(a,b)=\{w : \operatorname{Im}\left(\frac{w-a}{b}\right)>0\}$

$\mathcal{E}^{-}(a,b)=\{w : \operatorname{Im}\left(\frac{w-a}{b}\right)<0\}$



$\left.\frac{w-i}{1+i}\right|_{w=0} = \frac{-i}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{2}$

$= \frac{-i-1}{2}$

$w_1, w_2 \in \mathcal{E}(a,b)$: $\exists s_1 : w_1 = a+s_1 b$

$\exists s_2 : w_2 = a+s_2 b$

$w_1 - w_2 = (s_1-s_2)b \Rightarrow b = \frac{w_1-w_2}{s_1-s_2}$

$a = w_1 - s_1 b \Rightarrow a = w_1 - s_1\left(\frac{w_1-w_2}{s_1-s_2}\right)$

$w = a+sb = w_1 - s_1\left(\frac{w_1-w_2}{s_1-s_2}\right) + s\left(\frac{w_1-w_2}{s_1-s_2}\right)$

$= w_1 - \frac{s_1 w_1}{s_1-s_2} + \frac{s_1 w_2}{s_1-s_2} + \frac{s w_1}{s_1-s_2} - \frac{s w_2}{s_1-s_2}$

$= w_1\left(1 - \frac{s_1-s}{s_1-s_2}\right) + w_2\left(\frac{s_1-s}{s_1-s_2}\right)$

$t = \frac{s_1-s}{s_1-s_2}$ $\quad s = s_1 \Rightarrow t = 0$

$s = s_2 \Leftrightarrow t = 1$

$w = (1-t)\cdot w_1 + w_2 t$

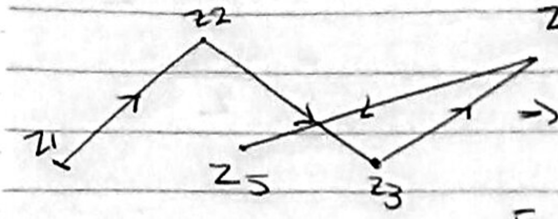
$[w_1, w_2] = \{w = (1-t)w_1 + t w_2 \ , \ t \in [0,1]\}$

Πχ. $1+3i$, $4-i$ $\quad [1+3i,\ 4-i] = \{ w=(1-t)(1+3i)+t(4-i),\ t\in[0,1]\}$

$$= 1-t+3(1-t)i+4t-ti =$$
$$= 1-t+3i-3ti+4t-ti =$$
$$= 1+3t+3(i-4t)$$

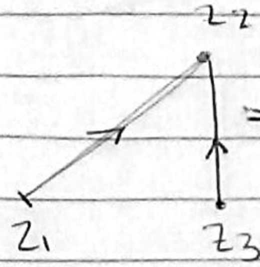
$[z_1,z_2]=\{z=(1-t)z_1+tz_2 : t\in[0,1]\}$

$[z_2,z_3]$

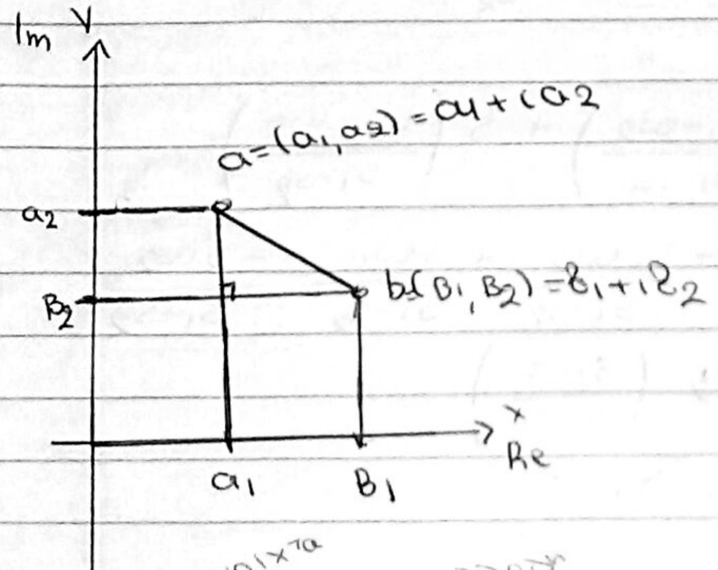


⇒ πολυγωνική καμπύλη

$[z_1,z_2]\cup[z_2,z_3]\cup\ldots\cup[z_4,z_5]=[z_1,z_2,\ldots,z_5]$



⇒ δεν προστίθενται αυτά τα 2!!



$|a-b|=\sqrt{(a_1-\beta_1)^2+(a_2-\beta_2)^2}$

$r>0$

$B(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$

$a\in A^\circ : \exists r>0 : B(a,r)\subseteq A$

$A=A^\circ$ ανοιχτό

$(\forall a\in A)(\exists r>0)\, B(a,r)\subseteq A$

A_i, $i\in J$ ανοιχτά ⇒ σύνολα

$\cup A$ ανοιχτό.

K κλειστό

$K\in\mathcal{K}$

$\cap K$ κλειστό

B φραγμένο: $\exists r>0 \;.\; B \subseteq B(0,r)$

ή $\operatorname{diam}(B) < +\infty$

$\sup\limits_{z,w\in B} |z-w| < +\infty$

• Σ συνεκτικό

$\nexists A,B$ ανοιχτά $\quad \Sigma\cap A \neq \emptyset$

$\Sigma\cap A\cap B = \emptyset \quad \Sigma\cap B \neq \emptyset$

T τόπος : 1) $T \neq \emptyset$

2) T ανοιχτό

3) T συνεκτικό *

$\to B \subseteq T$ ανοιχτό και κλειστό (ως προς T)

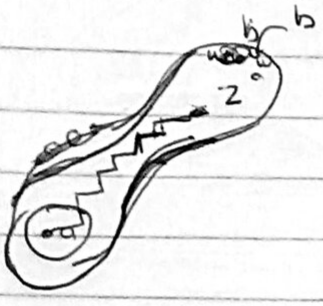
$(T-B)\cup(B) = T$ $\quad$ Συμπέρασμα: $B = T$

$(T-B)\cap(B) = \emptyset$ $\quad$ αυτό γιατί T ανοιχτό και συνεκτικό.

T τόπος $\Longleftrightarrow$ 1) $T \neq \emptyset$

2) T ανοιχτό

3) $\forall a,b \in T \;\; \exists [a,\dots,b] \subseteq T$ *



$a\in T \Rightarrow \exists r>0: B(a,r) \subseteq T$

$P(a) = \{z$: z ενών. με a με πολυγ. καμπύλη με πλευρές // άξονες$\}$

$P(a) \neq \emptyset$, $P(a)$ ανοιχτό!

θα δείξω και ότι $P(a)$ κλειστό, ή αλλιώς $P(a)^c$ ανο

$P(a)^c \to$ έχει όλα τα σημεία τα οποία δεν ενώνονται με τ

a με πολυγ. καμπύλη. __ $P(a)^c \ni w$

~~Έστω~~ Άρα $P(a) = T$

↳ ανοιχτό και κλειστό